TENSOR PROYEKTIF DAN HOM INJEKTIF MELALUI ADJOINTNISASI ENDOFUNGTOR EKSAK DI ANTARA KATEGORI MODUL

Denik Agustito
Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa
Email : rafaelagustito@gmail.com

ABSTRAK

Endofungtor di antara kategori modul melestarikan modul proyektif jika memliki adjoint kanan yang eksak. Melalui sifat endofungtor di antara kategori modul yang melestarikan modul proyektif tersebut menghasilkan beberapa sifat bahwa produk tensor dari dua buar modul proyektif adalah modul proyektif dan ruang homomorfisma dari modul flat ke modul injektif adalah modul injektif.

Kata kunci : Endofungtor, Hom, Injektif, Proyektif, Tensor.

Pendahuluan

Semua ring R dalam tulisan ini adalah ring komutatif dengan elemen satuan sehingga jika diberikan R-modul M dan N maka $\hom_R(M,N)$ dan $M\otimes_R N$ membentuk$R$-modul. Dalam teori kategori sebuah fungtor dikatakan endofungtor jika fungtor tersebut memetakan kategori $\mathcal{C}$ ke dirinya sendiri, biasanya ditulis $\mathrm{F}:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$. Jika $\mathcal{C}$ menyatakan kategori R-modul, biasanya ditulis $\mathrm{F}: R-\mathrm{Mod}\longrightarrow R-\mathrm{Mod}$ maka $\mathrm{F}: R-\mathrm{Mod}\longrightarrow R-\mathrm{Mod}$ dikatakan sebagai endofungtor di antara kategori modul. Salah satu contoh endofungtor di antara kategori mdoul yaitu sebagai berikut:
$\mathrm{F}(-) = -\otimes_R N: R-\mathrm{Mod}\longrightarrow R-\mathrm{Mod}$
dan $\mathrm{G}(-)=\hom_R(N,-): R-\mathrm{Mod}\longrightarrow R-\mathrm{Mod}$. Dalam teori kategori dua buah fungtor $\mathrm{F}:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ dan $\mathrm{G}:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{C}$dikatakan saling adjoint jika $\hom(\mathrm{F}(X),Y)\cong\hom\big(X,\mathrm{G}(Y)\big)$ untuk setiap obyek X dalam kategori $\mathcal{C}$ dan untuk setiap obyek Y dalam kategori $\mathcal{D}$. Dengan hubungan adjointnisasi tersebut, fungtor $\mathrm{F}:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ dikatakan fungtor adjoint kiri dari fungtor $\mathrm{G}:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{C}$ dan fungtor $\mathrm{G}:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{C}$ dikatakan fungtor adjoint kanan dari fungtor $\mathrm{F}:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$. Dalam teori modul jelas bahwa fungtor
$\mathrm{F}(-) = -\otimes_R N: R-\mathrm{Mod}\longrightarrow R-\mathrm{Mod}$
adalah fungtor adjoint kiri dari fungtor $\mathrm{G}(-)=\hom_R(N,-): R-\mathrm{Mod}\longrightarrow R-\mathrm{Mod}$. Dengan kata lain terdapat pemetaan bijektif berikut $\hom_R(M\otimes_R N,P)\cong\hom_R\big(M,\hom_R(N,P)\big)$.

Obyek proyektif dalam kategori $\mathcal{C}$ adalah obyek P yang memenuhi sifat berikut: jika diberikan sembarang diagram dari R-modul dan R-homomorfismanya yaitu:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "f"'] \arrow[d] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

dimana g adalah epimorfisma maka terdapat morfisma $h: P \longrightarrow A$ yang sifatnya $f = gh$. Seperti contoh obyek proyektif dalam kategori R-Mod dinamakan R-modul proyektif. Serupa dengan obyek injektif dalam suatu kategori $\mathcal{C}$ adalah obyek I yang memenuhi sifat berikut: Jika diberikan sembarang diagram dari R-modul dan R-homomrofismanya yaitu:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d] \\ & I \end{tikzcd}$$

Dimana f adalah monomorfisma maka terdapat morfisma $h: A \longrightarrow I$ yang sifatnya $h = gf$. Seperti contoh obyke injektif dalam kategori R-Mod dinamakan R-modul injektif. Jika kategori $\mathcal{C}$ dan kategori $\mathcal{D}$ memiliki obyek proyektif maka fungtor $\mathrm{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dikatakan melestarikan proyektif jika diberikan sembarang obyek proyektif P dalam kategori $\mathcal{C}$ maka $\mathrm{F}(P)$ adalah obyek proyektif dalam kategori $\mathcal{D}$. Jika kategori $\mathcal{C}$ dan kategori $\mathcal{D}$ memiliki obyek injektif maka fungtor $\mathrm{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dikatakan melestarikan proyektif jika diberikan sembarang obyek injektif I alam kategori $\mathcal{C}$ maka $\mathrm{F}(I)$ adalah obyek injektif dalam kategori $\mathcal{D}$.

Permasalahan dalam tulisan ini adalah mencari syarat agar endofungtor di antara kategori modul melestarikan R-modul proyektif melalui gagasan adjointnisasi endofungtor di antara kategori modul serta sifat-sifat yang diturunkan dari endofungtor yang melestarikan R-modul proyektif untuk menjawab kapan hasil kali tensor di antara dua buah R-modul akan menjadi R-modul proyektif dan kapan ruang homomorfisma dari R-modul yang satu ke yang lain akan membentuk R-modul injektif.

PEMBAHASAN

Sebuah endofungtor di antara kategori R-modul dikatakan eksak jika endofungtor tersebut melestarikan barisan eksak, dengan kata lain endofungtor $\mathrm{F}: R - \mathrm{Mod} \longrightarrow R - \mathrm{Mod}$ dikatakan fungtor eksak jika diberikan sembarang barisan eksak dari R-modul bersama dengan R-homomorfismanya yaitu :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

maka barisan dari R-modul dan R-homomorfismanya yaitu

$$0 \longrightarrow \mathrm{F}(A) \longrightarrow \mathrm{F}(B) \longrightarrow \mathrm{F}(C) \longrightarrow 0$$

adalah eksak.

Berikut lemma yang menegaskan syarat agar endofungtor di antara kategori R-modul melestarikan R-modul proyektif.

Lemma 1.1. Jika diberikan dua buah endofungtor di antara kategori R-modul yaitu $\mathrm{F}, \mathrm{G} : \mathrm{R}-\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ dimana F adalah fungtor adjoint kiri dari fungtor G dan G adalah eksak maka endofungtor F melestarikan R-modul proyektif.

Bukti.

Karena fungtor G adalah eksak maka setiap barisan eksak dari R-modul $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ menjadikan barisan dari R-modul berikut $0 \longrightarrow \mathrm{G}(A) \longrightarrow \mathrm{G}(B) \longrightarrow \mathrm{G}(C) \longrightarrow 0$ juga eksak. Untuk sembarang R-modul proyektif P diperoleh barisan eksak dari R-modul berikut $0 \longrightarrow \hom_R\big(P, \mathrm{G}(A)\big) \longrightarrow \hom_R\big(P, \mathrm{G}(B)\big) \longrightarrow \hom_R\big(P, \mathrm{G}(C)\big) \longrightarrow 0$. Karena fungtor F adalah adjoint kiri dari fungtor G maka diperoleh barisan eksak dari R-modul berikut $0 \longrightarrow \hom_R(\mathrm{F}(P), A) \longrightarrow \hom_R(\mathrm{F}(P), B) \longrightarrow \hom_R(\mathrm{F}(P), C) \longrightarrow 0$. Ini jelas bahwa $\mathrm{F}(P)$ adalah R-modul proyektif.

Teorema 1.2. Jika P_1 dan P_2 adalah R-modul proyektif maka $P_1 \otimes_R P_2$ juga R-modul proyektif.

Bukti.

Karena P_2 adalah R-modul, jelas fungtor $\hom_R(P_2, -): \mathrm{R}-\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ adalah fungtor eksak dan memiliki adjoint kiri yaitu fungtor $-\otimes_R P_2: \mathrm{R}-\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$. Berdasarkan Lemma 1.1 jika P_1 adalah R-modul proyektif maka $P_1 \otimes_R P_2$ adalah R-modul proyektif.

Teorema 1.3. Jika M adalah R-modul flat dan N adalah R-modul injektif maka $\hom_R(M, N)$ adalah R-modul injektif.

Bukti.

Karena M adalah R-modul flat, jelas fungtor $-\otimes_R M: \mathrm{R}-\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ adalah eksak. Jika diberikan sembarang barisan eksak dari R-modul yaitu $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ maka diperoleh barisan eksak dari R-modul berikut $0 \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow B \otimes_R M \longrightarrow C \otimes_R M \longrightarrow 0$. Jika N adalah sembarang R-modul injektif maka barisan dari R-modul berikut $0 \longrightarrow \hom_R(C \otimes_R M, N) \longrightarrow \hom_R(B \otimes_R M, N) \longrightarrow \hom_R(A \otimes_R M, N) \longrightarrow 0$ juga eksak. Karena fungtor $-\otimes_R M: \mathrm{R}-\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ memiliki adjoint kanan yaitu fungtor $\hom_R(M, -): \mathrm{R}-\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ maka diperoleh barisan eksak dari R-modul berikut $0 \longrightarrow \hom_R\big(C, \hom_R(M, N)\big) \longrightarrow \hom_R\big(B, \hom_R(M, N)\big) \longrightarrow \hom_R\big(A, \hom_R(M, N)\big) \longrightarrow 0$. Jadi $\hom_R(M, N)$ adalah R-modul injektif.

Teorema 1.4. Jika $\hom_R(M, N)$ dan N adalah R-modul injektif maka M adalah R-modul flat.

Bukti.

Karena $\hom_R(M, N)$ adalah R-modul injektif, jelas jika $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ adalah barisa eksak dari R-modul maka $0 \longrightarrow \hom_R(C, \hom_R(M, N)) \longrightarrow \hom_R(B, \hom_R(M, N)) \longrightarrow \hom_R(A, \hom_R(M, N)) \longrightarrow 0$ juga merupakan barisan eksak dari R-modul. Dengan menggunakan adjointnisasi diperoleh barisan eksak dari R-modul yaitu $0 \longrightarrow \hom_R(C \otimes_R M, N) \longrightarrow \hom_R(B \otimes_R M, N) \longrightarrow \hom_R(A \otimes_R M, N) \longrightarrow 0$. Karena N adalah R-modul injektif, jelas barisan dari R-modul $0 \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow B \otimes_R M \longrightarrow C \otimes_R M \longrightarrow 0$ adalah eksak. Jadi diperoleh M adalah R-modul flat.

Teorema 1.5. Jika $P_1 \otimes_R P_2$ dan P_1 adalah R-modul proyektif maka P_2 juga R-modul proyektif.

Bukti.

Karena $P_1 \otimes_R P_2$ adalah R-modul proyektif, jelas jika $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ adalah barisan eksak dari R-modul maka $0 \longrightarrow \hom_R(P_1 \otimes_R P_2, A) \longrightarrow \hom_R(P_1 \otimes_R P_2, B) \longrightarrow \hom_R(P_1 \otimes_R P_2, C) \longrightarrow 0$ adalah eksak. Dengan menggunakan adjointnisasi diperoleh barisan eksak dari R-modul yaitu $0 \longrightarrow \hom_R(P_1, \hom_R(P_2, A)) \longrightarrow \hom_R(P_1, \hom_R(P_2, B)) \longrightarrow \hom_R(P_1, \hom_R(P_2, C)) \longrightarrow 0$. Karena P_1 adalah R-modul proyektif, jelas diperoleh barisan eksak dari R-modul yaitu $0 \longrightarrow \hom_R(P_2, A) \longrightarrow \hom_R(P_2, B) \longrightarrow \hom_R(P_2, C) \longrightarrow 0$. Jadi diperoleh P_2 adalah R-modul proyektif.

KESIMPULAN

Kesimpulan dari tulisan ini adalah dengan adjointnisasi endofungtor pada di antara kategori modul yaitu endofungtor hom dan endofumgtor tensor mengakibatkan produk tensor di antara dua modul proyektif adalah modul proyektif dan ruang homomorfisma dari modul flat ke modul injektif adalah modul injektif.

DAFTAR PUSTAKA

Grillet. P. A, 2000,*Abstract Algebra, Second Edition*, Springer.

Mac Lanne, 1969, *Categories for the Working Mathematician,Second Edition*, Springer.

Strooker, Jan R, 1978, *Introduction to categories, homological algebra and sheaf cohomology*, Cambridge University Press.

Switzer. Robert M, 2002, *Algebraic Topology, Homology and Homotopy*, Springer-Verlag.